Definities

Een toegelaten oplossing met m positieve componenten noemt men een *basis-oplossing* en de corresponderende variabelen *basisvariabelen.*
Voor het toepassen van het simplexalgoritme zullen we soms ook beroep moeten doen op *hulpvariabelen.*

Voorbeeld

We lossen het probleem van de A- en B-broeken op met de simplexmethode.
Bepaal $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$ (we interesseren ons hier aan oplossingen in $\mathbf{R}$),waarvoor

$$\begin{cases} x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 100 \\ 3x_1 + x_2 \leq 192 \\ x_1 + x_2 \leq 120 \end{cases}$$

en $z = 40x_1 + 30_x 2 - 2400$ maximaal is.
Invoeren van verschilvariabelen geeft:
bepaal $x_1, x_2, v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbf{R}^+$,waarvoor

$$\begin{cases} x_1 + v_1 = 60 \\ x_2 + v_2 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + v_3 = 192 \\ x_1 + x_2 + v_4 = 120 \end{cases}$$

waarvoor $z = 40x_1 + 30x_2 - 2400$ maximaal is.
We merken op dat v_1, v_2 resp. de overschotten aan A- en B-broeken zijn.
We bepalen een startoplossing (hier erg eenvoudig ...):
$x_1 = 0, x_2 = 0$, zodat $v_1 = 60, v_2 = 100, v_3 = 192, v_4 = 120$.
Hiervoor is $z = -2400$.
De basisvariabelen zijn v_1, v_2, v_3, v_4.
Uit de gedaante van de doelfunctie blijkt dat z het snelst toeneemt als x_1 stijgt.
We nemen x_1 zo groot mogelijk (de andere variabelen mogen hierbij niet negatief worden):

$$\begin{cases} x_1 + v_1 = 60 \\ x_2 + v_2 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + v_3 = 192 \\ x_1 + x_2 + v_4 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 60 - x_1 \\ v_2 = 100 - x_2 \\ v_3 = 192 - 3x_1 - x_2 \\ v_4 = 120 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

$x_1 = 60, x_2 = 0, v_1 = 0, v_2 = 100, v_3 = 12, v_4 = 60$,
waarvoor $z = 0$.
We drukken z uit in functie van de nieuwe niet-basisvariabelen $(= 0)$:
$z = \ldots = 30x_2 - 40v_1$.
Het blijkt dat we z nog kunnen laten toenemen door x_2 te vergroten

$$\begin{cases} v_1 = 60 - x_1 \\ v_2 = 100 - x_2 \\ v_3 = 192 - 3x_1 - x_2 \\ v_4 = 120 - x_1 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 60 - v_1 \\ v_2 = 100 - x_2 \\ v_3 = 192 - 3(60 - v_1) - x_2 \\ v_4 = 120 - (60 - v_1) - x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 60 - v_1 \\ v_2 = 100 - x_2 \\ v_3 = 12 + 3v_1 - x_2 \\ v_4 = 60 + v_1 - x_2 \end{cases}$$

Dit kan maximaal met 12 eenheden.
De nieuwe basisvariabelen worden x_1, x_2, v_2, v_4.

$$\begin{cases} x_1 = 60 - v_1 \\ v_2 = 100 - x_2 \\ v_3 = 12 + 3v_1 - x_2 \\ v_4 = 60 + v_1 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 60 - v_1 \\ x_2 = 12 + 3v_1 - v_3 \\ v_2 = 100 - x_2 = 88 - 3v_1 + v_3 \\ v_4 = 60 + v_1 - x_2 = 48 - 2v_1 + v_3 \end{cases}$$

en $z = 30(12 + 3v_1 - v_3) - 40v_1 = 360 + 50v_1 - 30v_3$.
We kunnen z nog vergroten door v_1 met 24 eenheden te laten toenemen.
De nieuwe basis wordt x_1, x_2, v_1, v_2 en men heeft

$$\begin{cases} x_1 = 60 - v_1 \\ x_2 = 12 + 3v_1 - v_3 \\ v_2 = 100 - x_2 = 88 - 3v_1 + v_3 \\ v_4 = 60 + v_1 - x_2 = 48 - 2v_1 + v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 36 + \frac{v_4}{2} - \frac{v_3}{2} \\ x_2 = 84 - \frac{3v_4}{2} + \frac{v_3}{2} \\ v_2 = 16 + \frac{3v_4}{2} - \frac{v_3}{2} \\ v_1 = 24 - \frac{v_4}{2} + \frac{v_3}{2} \end{cases}$$

en $z = 1560 - 25v_4 - 5v_3$.
We vinden dus weer oplossing die we met de grafische methode bekwamen.
De winst is maximaal 1560 € als $x_1 = 36, x_2 = 84$

2.4.3 Synthese van de simplexmethode

- Maak een stelsel van vergelijkingen (gelijkheden) door invoeren van surplus- en verschilvariabelen
- Bepaal eerst een toegelaten basisoplossing
- Construeer, uitgaande van deze basisoplossing een nieuwe basisoplossing, die slechts één basisvariabele verschilt van de vorige. Daartoe wordt een van de huidige niet-basisvariabelen positief gemaakt, terwijl een van de huidige basisvariabelen op nul wordt gezet. Essentieel bij het veranderen van basisvariabelen is
  - de doelfunctie moet verbeterd worden
  - de nieuwe oplossing moet een toegelaten basisoplossing zijn.
- We gaan door met de voorgaande stap tot de doelfunctie niet meer kan verbeterd worden.

Grafisch komt het erop neer dat men de hoekpunten van het toelaatbare gebied afloopt tot men een optimale oplossing heeft gevonden.

2.4.4 Gebruik van een simplextableau

In eerste instantie zal men bij de berekeningen in het voorbeeld misschien gevonden hebben dat het er niet eenvoudiger op werd. Toch is dit wel degelijk het geval als men de zaken vanuit het perspectief van een computeralgoritme bekijkt. Het volstaat de gegevens voor te stellen in een zogenaamd *simplextableau* om te bemerken dat we over een haast mechanisch algoritme beschikken.

Voorbeeld

1.

40	30	0	0	0	0	-
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-
1 (*)	0	1	0	0	0	60
0	1	0	1	0	0	100
3	1	0	0	1	0	192
1	1	0	0	0	1	120
-40	-30	0	0	0	0	-2400

De variabelen x_3, x_4, x_5, x_6 stellen de verschilvariabelen voor en vormen ook de eerste basis. Zij hebben een coëfficiënt +1 in een vergelijking en coëfficiënten 0 in alle andere vergelijkingen.
De grootste negatieve coëfficiënt in de onderste lijn bepaalt de variabele die in de basis zal opgenomen worden; hier dus x_1.
Voor de kolom van x_1 bepalen we het (positieve!) minimum van de verhoudingen $\frac{60}{1}, \frac{192}{3}, \frac{120}{1}$, wat $\frac{60}{1}$ oplevert. De *spil* of *pivot* van kolom 1 is dan (*).
Vegen geeft:

2.

40	30	0	0	0	0	-
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-
1	0	1	0	0	0	60
0	1	0	1	0	0	100
0	1 (*)	-3	0	1	0	12
0	1	-1	0	0	1	60
0	-30	40	0	0	0	0

De volgende spil is (*) en vegen geeft nu:

3.

40	30	0	0	0	0	-
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-
1	0	1	0	0	0	60
0	0	3	1	-1	0	88
0	1	-3	0	1	0	12
0	0	2 (*)	0	-1	1	48
0	0	-50	0	30	0	360

De volgende spil is (*) en vegen geeft

4.

40	30	0	0	0	0	-
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-
1	0	0	0	1/2	-1/2	36
0	0	0	1	1/2	-3/2	16
0	1	0	0	-1/2	3/2	84
0	0	1	0	-1/2	1/2	24
0	0	0	0	5	25	1560

Op dit ogenblik zijn alle coëfficiënten in de onderste rij positief en stopt het algoritme. We vinden weer maximale winst van 1560 voor $x_1 = 36$ en $x_2 = 84$.

De bovenste rij bleef de hele tijd onveranderd. Zij zal pas een actieve rol gaan spelen bij de II-fasen methode.

Algemeen

We noteren nu alle variabelen met $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en gebruiken verder de notaties van het algemene LP-probleem. We voegen onderaan een rij van coëfficiënten r_j toe die een cruciale rol spelen bij het opnemen van nieuwe variabelen in de basis.
We vormen nu volgende tabel:

c_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_m	c_{m+1}	$\ldots$	c_n	-
x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_n	-
1	0	0	$\ldots$	0	a_{1m+1}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
0	1	0	$\ldots$	0	a_{2m+1}	$\ldots$	a_{2n}	b_2
0	0	1	$\ldots$	0	a_{3m+1}	$\ldots$	a_{3n}	b_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	$\ldots$	1	a_{mm+1}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
r_1	r_2	r_3	$\ldots$	r_m	r_{m+1}	$\ldots$	r_n	z_0

Opmerkingen

1. Voorlopig hebben we geen hulpvariabelen nodig, nemen we voor r_j gewoon $-c_j$ en voor z_0 de constante term uit de doelfunctie.

2. Men rangschikt de m basisvariabelen naast elkaar aan de linkerkant van het schema. Als er niet voldoende variabelen zijn die aan de voorwaarden voldoen (coëfficiënt $+1$ in een vergelijking en coëfficiënten 0 in alle andere vergelijkingen), dan vult men ze aan met de nodige hulpvariabelen of kunstmatige variabelen.

3. De coëfficiënten r_j bekomt men uit de c_j's via de formule

$$r_j = \vec{c}_B^T \cdot \vec{a_j} - c_j, j = 1 \ldots n \tag{2.4}$$

$\vec{a_j}$ is de j-de kolomvector uit de tabel.